შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 212

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ჯერ ნოშენიში მოსვლენილი ორი ადამიანი, ამიტომ და ანუ შეეძლოთ ერთმანეთის უშუალო საუბარი. ვაჩვენოთ რომ ამ 2012 დელეგატებს შეიძლება მოვათავსოთ 1006 ოთახში ორ-ორი დელეგატი, რომ და შეეძლოთ ერთმანეთის საუბარი.

ეს დელეგატები არის $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2012}$,

ამ ადამიანებიდან ყოველი იცის სამეულში, სულ ამ ენის სამეულში არსებობს 670 ეს იყოს, სამეულში, სადაც ყველა შეუძლია ისაუბრონ უშუალოდ. ხოლო ერთ წყვილს მესამე ეხმარება

$A \leftrightarrow C \leftrightarrow B$

ანუ A-ს შეუძლია C-სთან დალაპარაკება, ხოლო B-ს შეუძლია C-სთან დალაპარაკება.

A დალაპარაკება B-ს C-ს საშუალებით. ერთად ბოლო ორი მონაწილე $a_{2011} \leftrightarrow a_{2012}$. და შეუძლია უშუალო ურთიერთობა, ამიტომ მოვათავსოთ ერთ ოთახში. დანარჩენი 2010 მონაწილეებს, რომლებიც აღმოჩნდნენ ენის სამეულში დარჩნენ

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 212

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] შეიძლება [illegible]
[illegible] სულ [illegible] [illegible] იქნება 670. [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], რომლებიც შეიძლება [illegible]
[illegible] სულ [illegible] [illegible] რაოდენობა იქნება 335
და [illegible] [illegible] რაოდენობის [illegible] [illegible]. [illegible]
[illegible] [illegible] A-L და C-L რომლებიც [illegible] [illegible]
[illegible]. ამ [illegible] [illegible] B, რომელიც [illegible] [illegible]
[illegible] სხვა D [illegible] სხვა [illegible], რომლითაც [illegible]
[illegible]. [illegible] [illegible] რაოდენობა იქნება $\frac{670}{2} = 335$, ანუ
[illegible] [illegible]. [illegible] $N_1 = 670 + 335 = 1005$ [illegible] [illegible]
[illegible], რომლებიც [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible], რომლებიც [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible]
$N = 1005 + 1 = 1006$ [illegible] [illegible] 2012 [illegible] [illegible] [illegible]
1006 [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

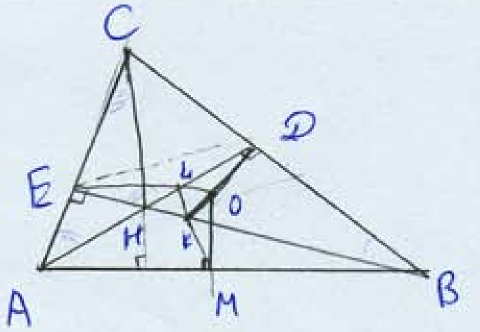
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 212

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



O არის შემოხაზული წრის ცენტრი, M შუა-ართვის? წერტილი, მაშინ $OM \perp AB$
$AM = MB$. H-ორთოცენტრი. ამიტომ
$HC = 2OM$. $\left.\begin{array}{l} CH \perp AB \\ OM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CH \parallel OM$

AEDB-ოთხკუთხედი ჩაიხაზება წრეში, რადგან $\angle AEB = \angle ADB = 90°$ ამიტომ AB დიამეტრი ამ წრის, ხოლო M-ცენტრი. ასევე $\angle CEB = \angle CDA = 90° \Rightarrow HECD$ ჩაიხაზება წრეში. ჩაწერილი წრის თვისებით $\angle EAD = \angle EBD$
$\angle DAB = \angle DEB =$
$= \angle DEH = \angle HCD$ ვაჩვენოთ რომ $\angle LKM = 180°$
ანუ $\angle EKL = \angle MKB$. მაშინ K, L, M ერთ წრფეზე. ამის შემდეგ ... ვთქ. $KL \cap AB = M_1$ მაშინ ამ ... $\angle AMK =$
$= \angle AM_1K$, მაშინ ... რომ $M_1 = M$. და K, L, M ერთ წრფეზე
... ჩაწერილი ... $\left.\begin{array}{l} \angle ACH = 90° - \angle A \\ \angle CEH = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EHC = \angle A$ ასევე $\angle CHD = \angle B$ ... $\Rightarrow \angle EHD =$
$= \angle A + \angle B$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 212

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ ატური ნაკი $a_n \geq 0$ და $a_n \in \mathbb{Z}$

$$a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$$

1) ვაჩვენოთ, რომ $\forall m \in \mathbb{N}$ თუკი რომ $a_m = a^2$ არ სხვა სრული კვადრატი არ გვხვდება. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში $[\sqrt{a_n}]$ იქნება a-ს ტოლი მანამ, სანამ მიმდევრობის წევრი არ გახდება $(a+1)^2$-ზე მეტი ან არ გაუტოლდება მას. ამიტომ თუ $a_m = a^2$ მაშინ $a_{m+1} = a^2 + a$ $\quad a^2+a < (a+1)^2 = a^2+2a+1$ ამიტომ $a_{m+2} = a^2+2a$ ასევე $(a^2+2a) < (a+1)^2$ ამიტომ $a_{m+3} = a^2+3a = a^2+2a+a$ ამ დროს $a^2+2a+a > a^2+2a+1$, როდესაც $a>1$. ამ შემთხვევაში არ გვხვდება და არ მოიძებნება ისეთი $k \geq m$ რომ a_k ყოფილიყო სრული კვადრატი

2) $a^2 < a_m < (a+1)^2$ ვაჩვენოთ რომ ამ შემთხვევაში შეიძლება მოიძებნოს სრული კვადრატი ასევე $[\sqrt{a_n}]$ იქნება a-ს ტოლი, მანამ სანამ მიმდევრობის წევრი არ გახდება $(a+1)^2$-ზე მეტი ან არ გაუტოლდება მას. თუ $a_m = a^2+1$, როდესაც წინა შემთხვევაში იყო a^2-ზე არ იყო ტოლი ან $a_m = a^2+1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №		28.04.2012/ მათ/ III/ 212

ამოცანა № 3   გვერდი № 2

ამიტომ $a_{m+1} = a^2+1+a = a^2+a+1 < (a+1)^2$ ამიტომ

$a_{m+2} = a_{m+1}+a = a^2+2a+1 = (a+1)^2$ ეს კი არის სრული

კვადრატი და ვაჩვენეთ, რომ ყოველი $m \in \mathbb{N}$ მოიძებნება ისეთი

$k \geq m$ (ამ შემთხვევაში $k=m+2>m$) ისეთი, რომ $a_k=(a+1)^2$

ანუ სრული კვადრატი არის მიმდევრობის წევრი. [illegible]

შემთხვევაში მოიძებნება სრული კვადრატი, რომ a_m [illegible]

არის (a^2+1)-ის ტოლი. სხვა შემთხვევაში კი მივიღებთ, რადგან

$a^2 < a_m < (a+1)^2$ $\Delta=(a+1)^2-a^2=2a+1$ [illegible]

ნებისმიერ რიცხვს, მაგრამ მიმდევრობის წევრი [illegible]

გადაახტება $(a+1)^2$. მაგალითად: $a_m=a^2+a \Rightarrow a_{m+1}=a^2+2a$ ხოლო

$a_{m+2}=a^2+3a$, რომელიც $a^2+3a>(a+1)^2$ ასევე $a_m=a^2+2a$

მაშინ კი მივიღებთ a_m $a_m=a^2+2a \Rightarrow a_{m+1}=a^2+3a$, რომელიც

$a^2+3a>(a+1)^2=a^2+2a+1$, რადგან $a>1$ ე.ი. ვაჩვენეთ, რომ როცა

$a_m=a^2+1$ [illegible] ყოველი $m \in \mathbb{N}$ მოიძებნება ისეთი

$k \geq m$ $(k=m+2)$ ისეთი, რომ a_k სრული კვადრატია

რ.დ.გ.